

# Chapitre VIII

## DIFFRACTION.

Joël SORNETTE vous prie de ne pas utiliser son cours à des fins professionnelles ou commerciales sans autorisation.

*Les lois de l'optique géométrique ne sont qu'un résultat approché des lois de l'électromagnétisme ; elles sont parfois mises en défaut. C'est en particulier le cas lorsqu'un faisceau lumineux est dia-phragmé et c'est à la périphérie du faisceau émergeant que s'observent les écarts ; on s'en mieux compte en focalisant ce faisceau par une lentille, les rayons normaux convergent dans le plan focal en un point qui n'est autre que l'image géométrique de la source et les rayons diffractés forment une tache bien visible autour de ce point.*

*Rappelons que tout ce qui suit est valable pour tous les types d'onde, le son et la houle, par exemple, donnent des phénomènes de diffraction bien nets.*

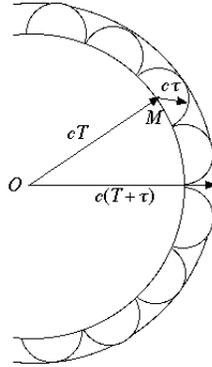
*Dans tout le chapitre, le milieu considéré est l'air d'indice confondu avec 1 et les chemins optiques sont égaux aux longueurs.*

### VIII-1 Historique

HUYGENS a proposé une explication géométrique simple à la propagation d'ondes à grande distance à partir d'un mécanisme d'action de proche en proche. Supposons qu'une onde issue d'un point  $O$  à partir de l'instant  $t = 0$  et se propageant à la vitesse  $c$  ait atteint à l'instant  $t = T$  tous les points à l'intérieur de la sphère de centre  $O$  et de rayon  $cT$ .

Les atomes en périphérie de cette sphère (comme celui situé au point  $M$  sur la figure) sont perturbés et transmettent cette perturbation en un temps  $\tau$  à tous leurs proches voisins, situés à une distance qui s'avérera être égale à  $c\tau$ . Dessinons un grand nombre de ces sphères «secondaires» centrées sur les points à la surface de la sphère initiale. Se dessine alors nettement une sphère de centre  $O$  et de rayon  $c(T + \tau)$  qui enveloppe toutes les sphères secondaires et qui contient tous les points perturbés à l'instant  $T + \tau$ . La propagation

d'une onde sphérique est ainsi justifiée géométriquement. C'est cette idée que reprendra FRESNEL un bon siècle plus tard pour expliquer les phénomènes de diffraction.

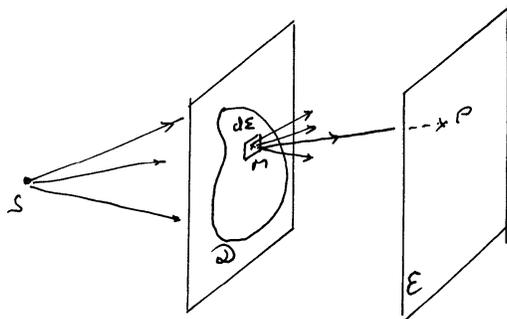


## VIII-2 Principe de Huygens-Fresnel

La méthode de calcul qui suit, bien que non démontrée, conduit à de bons résultats, tant qualitativement que quantitativement. Soit une source  $S$  envoyant de la lumière monochromatique vers un plan opaque percé d'un trou ou diaphragme  $\mathcal{D}$  et poursuivant son chemin vers un écran  $\mathcal{E}$ . Pour calculer l'amplitude complexe et l'intensité reçues par un point  $P$  de  $\mathcal{E}$ , on procède comme suit :

On découpe  $\mathcal{D}$  en surfaces élémentaires d'aire  $d\Sigma$ , de centre noté  $M$  et l'on considère l'ensemble de ces  $d\Sigma$  comme des sources secondaires cohérentes envoyant des ondes qui interfèrent en  $P$ , l'amplitude complexe émise par chacune de ces sources étant proportionnelle

- d'une part à l'amplitude complexe qu'elle reçoit de la source  $S$ ,
- d'autre part à son aire  $d\Sigma$ .



Détaillons :

Une surface élémentaire  $d\Sigma$  de centre  $M$  émet une onde qui, à l'arrivée en  $P$  est de la forme :

$$\underline{a}(P) \exp\left(-2j\pi \frac{\|\overrightarrow{MP}\|}{\lambda}\right)$$

Dans la pratique, on se trouve toujours dans une situation où  $\underline{a}(P)$  ne dépend que très peu de  $P$ , nous le considérerons donc comme constant.

Le principe de HUYGENS-FRESNEL nous apprend que cette constante est proportionnelle à  $d\Sigma$  et à ce que reçoit  $M$ , soit :

$$\underline{s}(M) \exp\left(-2j\pi \frac{\|\overrightarrow{SM}\|}{\lambda}\right)$$

où, là aussi et pour les mêmes raisons,  $\underline{s}(M)$  est pratiquement constant. Finalement  $P$  reçoit de  $d\Sigma$  en  $M$  :

$$Cte \exp\left(-2j\pi \frac{\|\overrightarrow{SM}\|}{\lambda}\right) \exp\left(-2j\pi \frac{\|\overrightarrow{MP}\|}{\lambda}\right) d\Sigma$$

Tous les  $d\Sigma$  sont supposés cohérents : il y a addition (une intégrale définie, en fait) des amplitudes complexes donc :

$$\underline{A}_{tot}(P) \propto \iint_{\mathcal{D}} \exp\left(-2j\pi \frac{\|\overrightarrow{SM}\|}{\lambda}\right) \exp\left(-2j\pi \frac{\|\overrightarrow{MP}\|}{\lambda}\right) d\Sigma$$

et, bien sûr l'intensité est  $I(P) = \underline{A}_{tot}(P) \underline{A}_{tot}(P)^*$ .

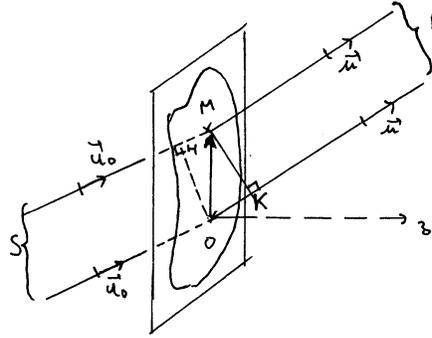
### VIII-3 Diffraction de Fraunhofer (= à l'infini)

Supposons maintenant le point  $P$  à l'infini dans la direction de vecteur unitaire  $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$  et la source  $S$  à l'infini dans la direction de vecteur unitaire  $\vec{u}_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ , le repère étant choisi avec  $O$  dans le diaphragme et  $Oz$  orthogonal à celui-ci. (voir figure)

Grâce au théorème de MALUS, en comparant les rayons  $SMP$  et  $SOP$ , on peut affirmer que  $[SO] = [SH]$  et donc  $[SM] = [SO] + \overline{HM} = [SO] + \vec{u}_0 \cdot \overline{OM}$  ; de même, on a envie de dire que  $[MP] = [KP]$  et donc  $[MP] = [OP] - \overline{OK} = [SO] - \vec{u} \cdot \overline{OM}$ . L'explication doit être figolée, car l'optique géométrique, donc le théorème de MALUS, cessent d'être valable après la traversée du diaphragme. Il faut *imaginer* une expérience où une source en  $P$  émettrait en sens inverse les rayons  $PM$  et  $PO$  pour valider la relation ci dessus.

Reportons dans l'intégrale précédent, en sortant les constantes.

$$\underline{A}_{tot}(P) \propto \exp\left(-2j\pi \frac{\|\overrightarrow{SO}\|}{\lambda}\right) \exp\left(-2j\pi \frac{\|\overrightarrow{OP}\|}{\lambda}\right) \iint_{\mathcal{D}} \exp\left(2j\pi \frac{(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \overline{OM}}{\lambda}\right) d\Sigma$$

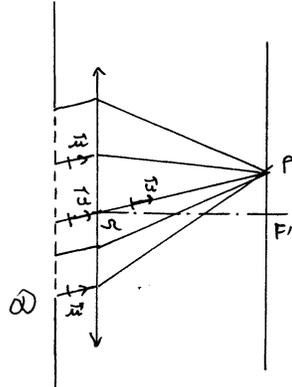


soit en ne tenant pas compte des constantes et en détaillant les produits scalaires :

$$\underline{A}_{tot}(P) \propto \iint_{\mathcal{D}} \exp\left(2j\pi \frac{(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y}{\lambda}\right) dx dy$$

formule qu'il faut mémoriser et savoir retrouver rapidement.

Dans la pratique, on place la source dans le plan focal-objet d'une première lentille convergente et l'écran d'observation dans le plan focal-image d'une seconde lentille convergente de centre optique  $\Omega$ , de foyer-image  $F'$  et de distance focale image  $f'$ .



La direction du faisceau qui converge en  $P$  est celle de  $\Omega P$  car le rayon qui traverse la lentille en  $\Omega$  n'est pas dévié. On a donc  $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{\Omega P}}{\|\overrightarrow{\Omega P}\|}$  donc

$\alpha = \frac{X}{\sqrt{f'^2 + X^2 + Y^2}}$  et  $\beta = \frac{Y}{\sqrt{f'^2 + X^2 + Y^2}}$  où  $X$  et  $Y$  sont les coordonnées de  $P$  dans le plan focal, l'origine étant prise en  $\Omega$ . En fait,  $X$  et  $Y$  sont petits devant  $f'$  et on a donc, en bonne approximation,  $\alpha = X/f'$  et  $\beta = Y/f'$ .

Un travail identique pour la source conduirait à  $\alpha_0 = -X_0/f_0$  et  $\beta_0 = -Y_0/f_0$ . On peut, à volonté, reporter ces expressions dans l'intégrale.

## VIII-4 Application aux diaphragmes courants

### VIII-4.a Diaphragme rectangulaire, fente

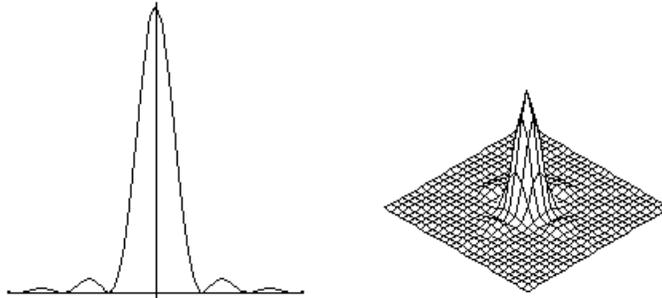
Si le diaphragme est un rectangle de côtés  $a$  et  $b$ , en prenant l'origine en son centre et les axes parallèles à ses côtés, l'intégrale se factorise en :

$$\underline{A}_{tot}(\alpha, \beta) \propto \int_{-a/2}^{+a/2} \exp\left(2j\pi \frac{(\alpha - \alpha_0)x}{\lambda}\right) dx \int_{-b/2}^{+b/2} \exp\left(2j\pi \frac{(\beta - \beta_0)y}{\lambda}\right) dy$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_{tot}(\alpha, \beta) &\propto \frac{\lambda}{\pi(\alpha - \alpha_0)} \sin\left(\frac{\pi a(\alpha - \alpha_0)}{\lambda}\right) \frac{\lambda}{\pi(\beta - \beta_0)} \sin\left(\frac{\pi b(\beta - \beta_0)}{\lambda}\right) \\ &= a b \operatorname{snc}\left(\frac{\pi a(\alpha - \alpha_0)}{\lambda}\right) \operatorname{snc}\left(\frac{\pi b(\beta - \beta_0)}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

et une intensité (on supprime les constantes) :

$$I(\alpha, \beta) \propto \operatorname{snc}^2\left(\frac{\pi a(\alpha - \alpha_0)}{\lambda}\right) \operatorname{snc}^2\left(\frac{\pi b(\beta - \beta_0)}{\lambda}\right)$$



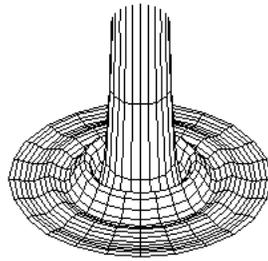
Le graphe de la fonction  $\operatorname{snc}^2(u)$  (à gauche) montre qu'elle est maximale en  $u = 0$ , donc  $I(\alpha, \beta)$  est maximale pour  $\alpha = \alpha_0$  et  $\beta = \beta_0$ , c'est à dire que la *tache de diffraction* est centrée sur l'image géométrique de la source. Ce qu'on voit (à droite : graphe de la fonction intensité en 3D) a l'allure caractéristique d'une tache très brillante, entourée en croix de taches secondaires peu lumineuses.

La tache centrale s'inscrit dans un rectangle correspondant au premier zéro de la fonction  $\operatorname{snc}$ , soit  $\alpha = \alpha_0 \pm \lambda/a$  et  $\beta = \beta_0 \pm \lambda/b$ . Il est essentiel de noter que la taille de la tache est inversement proportionnelle à la taille du diaphragme. En particulier une fente rectangulaire très allongée dans une direction donnera une tache écrasée dans cette direction et allongée dans la direction orthogonale.

On retiendra de la fonction  $\text{snc}^2(u)$ , outre le fait qu'elle est maximale et vaut 1 pour  $u = 0$ , que ses trois premiers maximums sont obtenus pour des valeurs de  $u$  proches de  $3\pi/2$ ,  $5\pi/2$  et  $7\pi/2$  et qu'ils valent respectivement 0,047 puis 0,016 et 0,008.

### VIII-4.b Diaphragme circulaire

Un diaphragme circulaire de diamètre  $D$  donnerait une *tache d'Airy*, circulaire entourée d'anneaux peu lumineux (cf le graphe en 3D de la fonction intensité, tronqué au centre). Le rayon angulaire de la tache centrale est donné par la formule  $\alpha = 1,22 \lambda/D$  et, au foyer d'une lentille de distance focale  $f'$ , son rayon est  $r = 1,22 \lambda f'/D$ .



On comprendra que ce phénomène limite le pouvoir de séparation des instruments d'optique, la lentille d'entrée fait office de diaphragme circulaire et l'image d'un point est une tache d'Airy ; les taches correspondant à deux points trop proches se mêleront et on ne verra qu'une seule tache, donc on ne percevra qu'un point unique là où il y en a deux.

### VIII-4.c Diaphragmes de phase et d'amplitude

En exercice, on élargira le champ des applications en étudiant des diaphragmes non parfaitement transparents ; en chacun de leurs points  $M$ , ils multiplient l'amplitude complexe reçue par un coefficient de transmission  $t(M)$  avant de la réémettre. Dans le contexte de la diffraction à l'infini, l'intégrale à calculer devient tout simplement :

$$\underline{A}_{tot}(P) \propto \iint_D t(x, y) \exp\left(2j\pi \frac{(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y}{\lambda}\right) dx dy$$

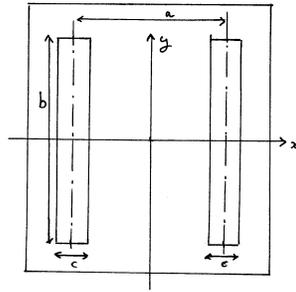
Si  $t(M)$  est un réel compris entre 0 et 1, on a affaire à un diaphragme d'amplitude (verre fumé ou négatif de photo) ; si  $t(M)$  est un complexe de

module 1, on a affaire à un diaphragme de phase (verre d'épaisseur variable introduisant une différence de marche  $(n - 1) e(M)$ )

## VIII-5 Fentes d'Young

### VIII-5.a Eclairées par une source ponctuelle

Il s'agit de deux fentes rectangulaires fines (largeur  $c$ ), très longues (hauteur  $b$  avec  $b \gg c$ ); on passe de l'une à l'autre par une translation de  $a$  (avec  $a > c$ ) dans le sens de la largeur; le tout est éclairé par une onde plane venant d'une source ponctuelle à l'infini (au foyer d'une lentille) qu'on supposera dans la direction orthogonale au plan des fentes pour alléger les calculs ( $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ ) et l'on observe la diffraction à l'infini (dans le plan focal d'une lentille.(voir figure)



Avec les notations de la figure, l'intégrale à calculer se factorise en :

$$\underline{A}_{tot}(\alpha, \beta) \propto \dots \int_{-b/2}^{+b/2} \exp\left(2j\pi \frac{\beta y}{\lambda}\right) dy \left( \int_{-a/2-c/2}^{-a/2+c/2} \exp\left(2j\pi \frac{\alpha x}{\lambda}\right) dx + \int_{+a/2-c/2}^{+a/2+c/2} \exp\left(2j\pi \frac{\alpha x}{\lambda}\right) dx \right)$$

Le premier facteur est un sinus cardinal de très petite largeur, car la fente est très longue dans cette direction; en pratique, l'éclairement est nul pour  $\beta \neq 0$ . Dans le second facteur qui est une somme, faisons le changement de variable  $x = -a/2 + \xi$  dans le premier terme et  $x = +a/2 + \xi$  dans le second. alors :

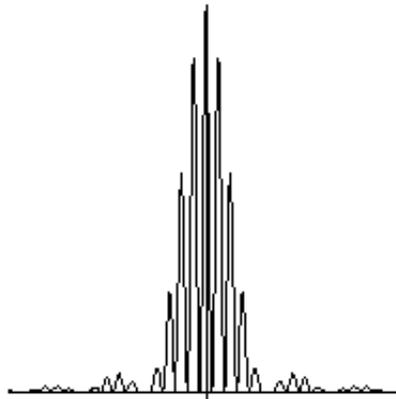
$$\underline{A}_{tot}(\alpha, 0) \propto \dots \exp\left(-j\pi \frac{\alpha a}{\lambda}\right) \int_{-c/2}^{+c/2} \exp\left(2j\pi \frac{\alpha \xi}{\lambda}\right) d\xi + \exp\left(+j\pi \frac{\alpha a}{\lambda}\right) \int_{-c/2}^{+c/2} \exp\left(2j\pi \frac{\alpha \xi}{\lambda}\right) d\xi$$

$$\underline{A}_{tot}(\alpha, 0) \propto 2 \cos\left(\pi \frac{\alpha a}{\lambda}\right) \int_{-c/2}^{+c/2} \exp\left(2j\pi \frac{\alpha \xi}{\lambda}\right) d\xi$$

et après passage au carré, calcul de l'intégrale (un sinus cardinal) et linéarisation, à des constantes multiplicatives près :

$$I(\alpha, 0) = \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\alpha a}{\lambda} \right) \right] \text{snc}^2 \left( \frac{\pi c \alpha}{\lambda} \right)$$

On trouve, et la philosophie des calculs a été choisie en ce sens, le produit de la fonction d'interférences qu'on obtiendrait avec deux fentes infiniment fines (ou deux trous, cf chapitre précédent et ses exercices) et de la fonction de diffraction qu'on obtiendrait avec une seule fente (cf paragraphe ci-dessus). Ce résultat est en fait général avec un ou plusieurs diaphragmes identiques en forme et en taille. Ci dessous l'allure de la courbe obtenue.



On voit en quoi la largeur des fentes diminue en pratique la largeur du champ d'interférences par baisse de l'intensité. Si l'on veut voir une dizaine de franges au moins dans la tache centrale de diffraction, le résultat montre qu'il faut  $c \leq a/10$ .

### VIII-5.b Eclairées par une fente source

Chaque point de la source a une image géométrique; elles sont alignées parallèlement à la fente. Autour de chaque point image, on a une tache d'épaisseur presque nulle dans le sens de la fente et étalée perpendiculairement. On comprend donc qu'ainsi la tache se trouve recopiée verticalement sur toute la hauteur de l'image de la fente. l'intensité ne dépend que de  $\alpha$  selon la même loi que précédemment, mais pour tout  $\beta$

### VIII-5.c Eclairées par une fente large

On peut considérer qu'elle est formée de fentes fines élémentaires incohérentes (donc ce sont les intensités qui s'ajoutent) qui s'étalent angulairement de  $-\alpha_m/2$  à  $+\alpha_m/2$  (ou linéairement de  $-f_0 \alpha_m/2$  à  $+f_0 \alpha_m/2$  au foyer d'une lentille). Chaque fente élémentaire dans la direction  $\alpha_0$  donne (cf supra) une

intensité en :

$$\left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{(\alpha - \alpha_0) a}{\lambda} \right) \right] \operatorname{snc}^2 \left( \frac{\pi c (\alpha - \alpha_0)}{\lambda} \right)$$

et il ne reste qu'à intégrer sur  $\alpha_0$  ; oui mais c'est impossible explicitement. Plaçons-nous dans le cas plus simple de fentes d'YOUNG très fines, seule la fente source sera large. Formellement  $c \rightarrow 0$  et  $\operatorname{snc}(\dots) \rightarrow 1$ . on a donc à intégrer (en s'aidant de la parité)  $[1 + \cos(2\pi (\alpha_0 - \alpha) a/\lambda)]$ . Donc :

$$\mathcal{J}(\alpha, \beta) = \int_{-\alpha_m/2}^{+\alpha_m/2} [1 + \cos(2\pi (\alpha_0 - \alpha) a/\lambda)] d\alpha_0$$

$$\mathcal{J}(\alpha, \beta) = \alpha_m + \frac{\lambda}{2\pi a} \left[ \sin \left( 2\pi \frac{(\alpha_m/2 - \alpha) a}{\lambda} \right) - \sin \left( 2\pi \frac{(-\alpha_m/2 - \alpha) a}{\lambda} \right) \right]$$

$$\mathcal{J}(\alpha, \beta) = \alpha_m + \frac{\lambda}{\pi a} \sin \left( \pi \frac{\alpha_m a}{\lambda} \right) \cos \left( 2\pi \frac{\alpha a}{\lambda} \right)$$

$$\mathcal{J}(\alpha, \beta) = \alpha_m \left[ 1 + \operatorname{snc} \left( \pi \frac{\alpha_m a}{\lambda} \right) \cos \left( 2\pi \frac{\alpha a}{\lambda} \right) \right]$$

On a une fonction parfaitement sinusoidale variant entre

$$\mathcal{J}_{min} = \alpha_m [1 - \operatorname{snc}(\dots)]$$

et

$$\mathcal{J}_{max} = \alpha_m [1 + \operatorname{snc}(\dots)]$$

et de contraste

$$\gamma = (\mathcal{J}_{max} - \mathcal{J}_{min}) / (\mathcal{J}_{max} + \mathcal{J}_{min}) = \operatorname{snc}(\pi \alpha_m a/\lambda)$$

On a un contraste acceptable si l'argument du  $\operatorname{snc}$  ne dépasse pas  $\pi/2$  donc si  $\alpha_m$  ne dépasse pas  $\lambda/2a$ . Typiquement avec  $a$  de l'ordre de moins de 1 mm et  $\lambda$  de moins de 1  $\mu\text{m}$ ,  $\alpha_m$  ne doit pas dépasser  $0,5 \cdot 10^{-3}$  rad (un demi-millimètre au foyer d'une lentille de 1 m de distance focale).